تمرين:

نقول عن المجموعة الجزئية X من Z بأنها n دورية إذا كانت $X = X+n$ حيث n عدد طبيعي، وحيث أن $X+n = \{x+n \mid x \in X\}$ برهن أن المجموعة P_n من المجموعات الجزئية n - دورية تكون حلقة بوليانية جزئية من $P(Z)$

الحل:

نفرض أن $X, Y \in P_n$ فإن $X = X+n$ و $Y = Y+n$

$X \cap Y = (X+n) \cap (Y+n) = (X \cap Y)+n \Rightarrow X \cap Y \in P_n$

$\forall X \in P_n$ بأن

$C_X = C_{X+n} \Rightarrow C_X \in P_n$ ومنه فإن: P_n حلقة بوليانية جزئية من Z

للتوضيح

$x \notin X \quad x = y+n$

$\exists y \in X ; y+n \in C_X$

$\Rightarrow y+n \in C_{X+n}$

$X = X+n$ لأن

تمرين:

لتكن (A_i) أسرة من الحلقات البوليانية $A = \prod_{i \in I} A_i$ حلقة الجداء البوليانية لتكن B^I المجموعة من العناصر $(x_i)_{i \in I}$ حيث $x_i = 1$ أو $x_i = 0$ عدا عدد منته منها فقط برهن أن B حلقة بوليانية جزئية من A

الحل:

نفرض أن $(x_i)_{i \in I}$ ، $(y_i)_{i \in I}$ عنصرين اختياريين من B بأن

$(x_i)_{i \in I} + (y_i)_{i \in I} = (x_i + y_i)_{i \in I} \in B$

مركبة n

لأنه إذا كانت في العناصر (x_i) مختلفة عن الصفر الواحد وإذا كانت في العناصر $(y_i)_{i \in I}$ مختلفة عن الصفر الواحد بأن $(x_i + y_i)_{i \in I}$ عدا $n+m$ مركبة على الأكثر مختلفة عن الصفر الواحد

$(x_i \cdot y_i)_{i \in I}$

كما أن $(x_i)_{i\in I}(y_i)_{i\in I} = (x_i y_i)_{i\in I} \in B$ وذلك لنفس السبب

بأن العنصر المحايد (بالنسبة للضرب) $(1,1,1,\dots)$ ينتمي إلى B وبالتالي فإن B تكون حلقة بوليانية جزئية من A

تمرين:

في حلقة تبديلية بواحدية نقول عن المثالية الفعلية I بأنها قابلة للتحليل reducible إذا وجدت [redacted] مثاليتين J, K بحيث أن [redacted] $I = J \cap K$ حيث $I \neq J$, $I \neq K$ ونقول عن المثالية الفعلية بأنها غير قابلة للتحليل irreducible إذا لم تكن قابلة للتحليل

a) في الحلقة البوليانية A بين أن المثالية الفعلية الغير أعظمية تكون قابلة للتحليل
(إرشاد: توجد $a \in A$ حيث $a \notin I$ & $a' \in I$ ، نفرض عندئذ
$J = \{x \vee y ; x \in I \ \& \ y \leq a'\}$
$K = \{x \vee y ; x \in I \ \& \ y \leq a\}$

b) استنتج أنه في الحلقة البوليانية المفاهيم الثلاثة التالية متكافئة: المثالية الأعظمية، المثالية الأولية، المثالية الغير قابلة للتحليل

الحل:

a) لنفرض أن J مثالية
- نفرض أن $x \vee y \in J$ فإن $x \in I$ & $y \leq a$ فإذا كان
$\Leftarrow z \leq x \vee y$

$z \wedge (x \vee y) = z \Rightarrow (z \wedge x) \vee (z \wedge y) = z$

$z \wedge x \leq x$ & $x \in I \Rightarrow z \wedge x \in I$
$y \leq a \Rightarrow z \wedge y \leq y \leq a$

ومنه فإن $(z \wedge x) \vee (z \wedge y) = z \in J$

نفرض أن $x \vee y \in J$, $x_1 \vee y_1 \in J$

$x \vee y \in J \Rightarrow x \in I$ & $y \le a$

$x_1 \vee y_1 \in J \Rightarrow x_1 \in I$ & $y_1 \le a$ $\Big\} \Rightarrow (x \vee y) \vee (x_1 \vee y_1) = (x \vee x_1) \vee (y \vee y_1)$

$x \vee x_1 \in I$ $\quad y \le a$, $y_1 \le a \Rightarrow y \vee y_1 \le a$

ومنه ينتج $(x \vee y) \vee (x_1 \vee y_1) \in J$ وبالتالي فإن J مثالية وبنفس الطريقة

تماماً نبرهن أن k مثالية أيضاً

$J \cap k = \{x \vee y ; x \in I$ & $y \le a$ & $y \le a'\} = \{x \vee y ; x \in I$ & $y \le a a'\}$

$= \{x \vee y ; x \in I , y = 0\} = \{x \vee 0 ; x \in I\} = \{x ; x \in I\} = I$

أي أن I قابلة للتفكيك

b) في المبرهنة السابقة أثبتنا العلاقة التي تربط بين مفهومي المثالية الأعظمية والمثالية الأولية والبرهان الآن التكافؤ بين المثالية الأعظمية والمثالية غير القابلة للتفكيك

نفرض أن I مثالية أعظمية ولنفرض جدلاً أنها قابلة للتفكيك. عندئذٍ

إذا كانت $a \in A$ بحيث $a \notin I$ فإن $a' \in I$ وبالتالي

$k = \{x \vee y , x \in I , y \le a' , a' \in I\} \subseteq I$

$\Rightarrow y \in I$ & $x \in I$

$k \subseteq I$ & $I \subseteq k \} \Rightarrow I = k$

~~أي أن I غير قابلة للتفكيك وهذا يناقض الفرض~~

هذا خلاف للفرض الجدلي فإنه أي أن I غير قابلة للتفكيك

نفرض أن I مثالية فعلية غير قابلة للتفكيك ولنفرض جدلاً أن I غير أعظمية

عندئذٍ يكون لدينا $a \in A$ حيث $a \notin I$ & $a' \notin I$ حيث أن .

$J = \{x \vee y ; x \in I ; y \le a\}$ $\qquad k = \{x \vee y ; x \in I ; y \le a'\}$

وحيث $I = \bigcap K$ ومنه نستنتج أن I قابلة للتفكيك وهذا تناقض للفرض والمبرهن
إذن فرضنا أن I مثالية أعظمية

تمرين:

لتكن A حلقة بولينية $I = Aa$ $(a \neq 0)$ مثالية فيها
برهن أن I هي حلقة بولينية من أجل علاقة الترتيب المحدودة وعرف جميع العمليات البوليانية في I . في أي حالة تكون I حلقة بولينية جزئية من A ؟

الحل:

1- إن I هي شبكة لأنه

$\forall x, y \in I \quad x \le a \ \& \ y \le a \Rightarrow x \vee y \le a \Rightarrow x \vee y \in I$

$x \wedge y \le a \Rightarrow x \wedge y \in I$

- إن $I \subseteq A$ و A توزيعية بالتالي فإن I شبكة توزيعية
- العنصر الأكبر في I هو a لأن $\forall x \in Aa = I$ يكون $x \le a$ (a هو العنصر الأكبر)
- العنصر الأصغر في I هو 0
- I متممة لأنه إذا كانت $x \in I \Leftarrow x \in A$ ، A حلقة بولينية إذاً لكل عنصر متمم في A هو x' فإن $x' \wedge a$ يكون متمم لـ x في I

$x \vee (x' \wedge a) = (x \vee x') \wedge (x \vee a) = 1 \wedge a = a$ (لأن $x \le a \Leftarrow x \vee a = a$) العنصر الأكبر في I

$x \wedge (x' \wedge a) = (x \wedge x') \wedge a = 0 \wedge a = 0$ العنصر الأصغر

ومنه نستنتج أن I حلقة بولينية

$(x+y)_I = x y'_I \vee x'_I y = x y' a \vee x' a y = (x y' \vee x' y) a$

$= (x+y) a$

$x'_I = x + a$ → العنصر الأكبر في I

- تكون I حلقة بولينية جزئية من A إذا كانت تحوي العنصر الأكبر والذي هو 1 وبالتالي تصبح $I = A$